BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМИЗАЦИИ МОЛНИЙ

В.Э.ИСМАИЛОВ
Институт Математики и
Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

В работе предлагается новый метод нахождения точного значения наилучшего приближения функции двух переменных суммами функций одной переменной, основанный на принципе максимизации молний.

Одним из первых и достаточно содержательных задач теории приближения суперпозициями функций меньшего числа переменных является задача равномерной аппроксимации функции $f(x,y)$ суммами $\varphi(x)+\psi(y)$.

Пусть Q – компакт в плоскости R^2, Q_1 и Q_2 – его проекции на оси координат, $C(Q), C(Q_i)$, $i=1,2$ – пространства вещественных непрерывных функций на Q и Q_i, $i=1,2$, соответственно, снабженные обычной равномерной нормой. Через $D(Q)$ обозначим подпространство в $C(Q)$, состоящее из всех функций вида $\varphi(x)+\psi(y)$, где $\varphi(x)\in C(Q_1)$, $\psi(y)\in C(Q_2)$. Рассмотрим приближение функции $f(x,y)\in C(Q)$ функциями из $D(Q)$. Наилучшее приближение определяется как расстояние от функции f до многообразия $D(Q)$:

$$E(f)=E(f,Q)\overset{def}{=}\rho\big(f,D(Q)\big)=\inf_{\varphi+\psi\in D}\|f-\varphi-\psi\|_C .$$

Рядом авторов были разработаны практические методы нахождения точного значения наилучшего приближения некоторых классов функций, определенных на прямоугольнике со сторонами, параллельными координатным осям. Например, формула

$$E(f,R)=\frac{1}{4}\big[f(a_1,a_2)+f(b_1,b_2)-f(a_1,b_2)-f(a_2,b_1)\big], \tag{1}$$

где $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, была получена Ривлином и Сибнером [6] для функций $f(x,y)$ со смешанной производной $f_{xy}\geq 0$, М-Б.А.Бабаевым [2] для функций со смешанной разностью $\Delta_{h_1h_2} f \ge 0$. Формулы типа (1) были получены автором [5] для некоторых, специальным образом, построенных классов непрерывных функций. Заметим, что результаты Ривлина и Сибнера, а также М-Б.А.Бабаева были обобщены соответственно Флатто [7] и М-Б.А.Бабаевым [3] на функции n переменных, определенных на параллелепипеде со сторонами, параллельными координатным осям.

Следует заметить, что в известных методах доказательств формул типа (1) существенным образом используются вершины данного прямоугольника. Это положение в свою очередь затрудняет получение такого рода формул для других областей приближения.

В настоящей работе, с помощью вводимого автором принципа максимизации молний, предлагается новый метод получения эффективных формул вычисления наилучшего приближения для простых многоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Мы покажем эффективность этого метода для нахождения точного значения наилучшего приближения функций двух переменных, определенных на шестиугольниках.

Пусть L - замкнутый шестиугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Понятно, что L можно представить в виде объединения двух прямоугольников R_1 и R_2, каждый из которых не является подмножеством какого-либо прямоугольника лежащегося в L.

Конечная последовательность $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ точек из L называется молнией (см.[1]), если $p_i \ne p_{i+1}$, каждый из отрезков $p_i p_{i+1}$ (звено молнии) параллелен либо оси x, либо оси y, и два соседних отрезка $p_i p_{i+1}$ и $p_{i+1}p_{i+2}$ перпендикулярны. Молния называется замкнутой, если $p_n p_1 \perp p_1 p_2$ (в этом случае обязательно n - четное число).

Свяжем с каждой замкнутой молнией $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}\}$ следующий линейный функционал

$$r(f, p) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} f(p_k). \qquad (2)$$

Через $M(L)$ (см. [2]) обозначим класс непрерывных на L функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) \ge 0,$$

для любого прямоугольника $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset L$.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ принадлежит классу $M(L)$. Тогда наилучшее приближение функции $f(x, y)$ может быть вычислено по формуле

$$E(f, L) = \max\{|r(f, l_1)|, |r(f, l_2)|, |r(f, l)|\} \qquad (3)$$

где l_1, l_2 и l замкнутые молнии, образованные соответственно вершинами R_1, R_2 и L.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что прямоугольники R_1 и R_2 имеют следующий вид:

$$R_1 = [a_1, a_2] \times [b_1, b_3],\ R_2 = [a_1, a_3] \times [b_1, b_2],\ a_1 < a_2 < a_3,\ b_1 < b_2 < b_3.$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} f(a_1, b_1) = f_{11};\ \ f(a_2, b_1) = -f_{21};\ \ f(a_3, b_1) = -f_{31}; \\ f(a_1, b_2) = -f_{12};\ \ f(a_2, b_2) = -f_{22};\ \ f(a_3, b_2) = f_{32}; \\ f(a_1, b_3) = -f_{13};\ \ f(a_2, b_3) = f_{23}; \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда очевидно,

$$\begin{gathered} |r(f, l_1)| = \frac{f_{11} + f_{13} + f_{23} + f_{21}}{4};\quad |r(f, l_2)| = \frac{f_{11} + f_{12} + f_{32} + f_{31}}{4}; \\ |r(f, l)| = \frac{f_{11} + f_{13} + f_{23} + f_{22} + f_{32} + f_{31}}{6}. \end{gathered} \tag{5}$$

Пусть дана произвольная замкнутая молния $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}\}$. Точки $p_1, p_3, \cdots, p_{2n-1}$ назовем «+» точками, а точки $p_2, p_4, \cdots, p_{2n}$ «–» точками молнии p. Понятно, что значение $f(p_k)$ входит в выражение (2) со знаком +, если p_k является «+» точкой и со знаком –, если p_k является «–» точкой молнии p.

Сначала предположим, что $r(f, p) \geq 0$. К этой молнии применим следующий процесс, который в дальнейшем будем называть процессом максимизации молнии p. Этот процесс включает в себя два этапа:

I этап. На этом этапе последовательно рассматриваем все те звенья $p_i p_{i+1}$ $(i = \overline{1, 2n}, p_{2n+1} = p_1)$ молнии p, вершины $p_i = (x_i, y_i)$, $p_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$ которых имеют равные абсциссы: $x_i = x_{i+1}$. Для каждого такого звена возможен один из четырех случаев:

1) p_i «+» точка и $y_{i+1} > y_i$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_1, y_i)$, $q_{i+1} = (a_1, y_{i+1})$.

2) p_i «+» точка и $y_{i+1} < y_i$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами, $q_i = (a_2, y_i)$, $q_{i+1} = (a_2, y_{i+1})$, если $b_2 < y_i \leq b_3$, и с вершинами $q_i = (a_3, y_i)$, $q_{i+1} = (a_3, y_{i+1})$, если $b_1 \leq y_i \leq b_2$.

3) p_i «–» точка и $y_{i+1} < y_i$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами $q_i = (a_1, y_i)$, $q_{i+1} = (a_1, y_{i+1})$.

4) p_i «–» точка и $y_{i+1} > y_i$. В этом случае заменяем звено $p_i p_{i+1}$ новым звеном $q_i q_{i+1}$ с вершинами, $q_i = (a_2, y_i)$, $q_{i+1} = (a_2, y_{i+1})$, если $b_2 < y_{i+1} \leq\ \ \leq b_3$, и с вершинами $q_i = (a_3, y_i)$, $q_{i+1} = (a_3, y_{i+1})$, если

$b_1 \le y_{i+1} \le b_2$.

Очевидно, что после I этапа процесса максимизации вся молния p заменится упорядоченным множеством точек $q=\{q_1,q_2,\cdots,q_{2n}\}$, среди которых могут быть равные и следующие друг за другом точки, т.е. такие q_i, что $q_i=q_{i+1}$ (это, например, может случаться, если к звеньям $p_{i-1}p_i$ и $p_{i+1}p_{i+2}$ применяется 1-ый случай). Исключим последовательные и одновременно равные точки из q. Тогда получим замкнутую молнию, которую обозначим через $q'=\{q_1',q_2',\cdots,q_{2m}'\}$. Нетрудно понять, что все вершины молнии q' находятся на прямых $x=a_1$, $x=a_2, x=a_3$ и

$$r(f,p)\le r(f,q'). \qquad (6)$$

II этап. На этом этапе последовательно рассматриваем все те звенья $q_i'q_{i+1}'$ $(i=\overline{1,2m},\ q_{2m+1}'=q_1')$ молнии q', вершины $q_i'=(x_i',y_i')$, $q_{i+1}'=(x_{i+1}',y_{i+1}')$ которых имеют равные ординаты: $y_i'=y_{i+1}'$. Для каждого такого звена возможен один из четырех случаев:

1) q_i' «+» точка и $x_{i+1}'>x_i'$. В этом случае заменяем звено $q_i'q_{i+1}'$ новым звеном h_ih_{i+1} с вершинами $h_i=(x_i',b_1)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_1)$.

2) q_i' «+» точка и $x_{i+1}'<x_i'$. В этом случае заменяем звено $q_i'q_{i+1}'$ новым звеном h_ih_{i+1} с вершинами, $h_i=(x_i',b_2)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_2)$, если $x_i'=a_3$, и с вершинами $h_i=(x_i',b_3)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_3)$, если $x_i'=a_2$.

3) q_i' «–» точка и $x_{i+1}'<x_i'$. В этом случае заменяем звено $q_i'q_{i+1}'$ новым звеном h_ih_{i+1} с вершинами, $h_i=(x_i',b_1)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_1)$.

4) q_i' «–» точка и $x_{i+1}'>x_i'$. В этом случае заменяем звено $q_i'q_{i+1}'$ новым звеном h_ih_{i+1} с вершинами, $h_i=(x_i',b_2)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_2)$, если $x_{i+1}'=a_3$, и с вершинами $h_i=(x_i',b_3)$, $h_{i+1}=(x_{i+1}',b_3)$, если $x_{i+1}'=a_2$.

Нетрудно понять, что после II этапа процесса максимизации вся молния q' заменится новой замкнутой молнией $h=\{h_1,h_2,\cdots,h_{2m}\}$, каждая «+» точка которой совпадает с одной из точек (a_1,b_1), (a_2,b_3), (a_3,b_2) и каждая «–» точка совпадает с одной из точек $(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1)$. Нетрудно заметить также, что

$$r(f,q')\le r(r,h). \qquad (7)$$

Из (6) и (7) выводим

$$r(f,p)\le r(r,h). \qquad (8)$$

Итак, применяя вышеуказанный процесс максимизации к произвольной замкнутой молнии p, для которой $r(f,p)\ge 0$, мы заменили ее новой замкнутой молнией h, вершины которой находятся в вершинах многоугольников L,R_1,R_2. Число вершин молнии $h=\{h_1,h_2,\cdots,h_{2m}\}$, совпадающих с точкой (a_i, b_j), $i, j = \overline{1,3}$, $i + j \neq 6$, обозначим через m_{ij}. Тогда на основании обозначений (4) можно написать:

$$r(f,h) = \frac{1}{2m} \sum_{\substack{i,j=\overline{1,3} \\ i+j \leq 5}} m_{ij} f_{ij} \tag{9}$$

Понятно, что на линиях $x = a_i$ или $y = b_i$, $i = \overline{1,3}$, число «+» и «–» точек молнии h равны. Следовательно,

$$m_{11} = m_{12} + m_{13}; \quad m_{11} = m_{21} + m_{31}; \quad m_{23} = m_{22} + m_{21};$$

$$m_{23} = m_{13}; \quad m_{32} = m_{31}; \quad m_{32} = m_{12} + m_{22};$$

Из этих равенств получим

$$\begin{gathered} m_{11} = m_{12} + m_{21} + m_{22}; \quad m_{13} = m_{21} + m_{22}; \\ m_{23} = m_{21} + m_{22}; \quad m_{31} = m_{12} + m_{22}. \end{gathered} \tag{10}$$

Следовательно,

$$2m = \sum_{\substack{i,j=\overline{1,3} \\ i+j \leq 5}} m_{ij} = 4m_{12} + 4m_{21} + 6m_{22}. \tag{11}$$

Подставляя значения (10) и (11) в (9) и приводя подобные члены относительно m_{12}, m_{21} и m_{22}, получим:

$$r(f,h) = \frac{4m_{12}\left|r(f,l_2)\right| + 4m_{21}\left|r(f,l_1)\right| + 6m_{22}\left|r(f,l)\right|}{4m_{12} + 4m_{21} + 6m_{22}}. \tag{12}$$

Обозначим

$$S = \max\left\{\left|r(f,l_1)\right|, \left|r(f,l_2)\right|, \left|r(f,l)\right|\right\}.$$

Тогда из (12) получим

$$r(f,h) \leq S. \tag{13}$$

Неравенство (8) вместе с (13) дает

$$r(f,p) \leq S. \tag{14}$$

Заметим, что в начале доказательства молния p была выбрана так, что $r(f,p) \geq 0$. Пусть теперь $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}\}$ произвольная замкнутая молния с условием $r(f,p) \leq 0$. Тогда для замкнутой молнии $p' = \{p_2, p_3, \cdots, p_{2n}, p_1\}$ можно написать

$$r(f,p') = -r(f,p) \geq 0.$$

Поэтому для молнии p' справедливо неравенство (14). Следовательно,

$$-r(f,p) \leq S. \tag{15}$$

На основании (14) и (15) для произвольной замкнутой молнии p имеем

$$\left|r(f,p)\right| \leq S.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sup_{h \subset L} \{ |r(f,h)| \} = S , \qquad (16)$$

где sup берется по всем замкнутым молниям множества L.

Множество L удовлетворяет всем условиям теоремы 3 из [4] о существовании наилучшей приближающей суммы $\varphi_0(x) + \psi_0(y)$. В силу одного результата С.Я.Хавинсона из [8]

$$E(f,L) = \sup_{h \subset L} \{ |r(f,h)| \} . \qquad (17)$$

Из (16) и (17) окончательно получим

$$E(f,L) = S .$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x,y)$ имеет неотрицательную непрерывную смешанную производную на множестве L: $f_{xy} \geq 0, (x,y) \in L$. Тогда для наилучшего приближения функции $f(x,y)$ справедлива формула (3).

Доказательство. Так как f_{xy} непрерывна и неотрицательна на множестве L, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{xy} \, dxdy \geq 0 ,$$

для произвольного прямоугольника $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset L$. Из последнего неравенства легко получается включение $f \in M(L)$ и тем самым справедливость формулы (3).

Замечание. *Основной принцип – принцип максимизации молний, использованный в доказательстве теоремы, может быть успешно применен для получения формул типа (3), когда в качестве области приближения выбраны другие простые замкнутые многоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. О функциях трех переменных. Докл. АН СССР, 1957, т.114, № 4, 679-681.
2. Бабаев М-Б.А. О точных оценках приближения функций многих переменных суммами функций меньшего числа переменных. Мат. Заметки, 1972, т.12, № 1, 105-114.
3. Бабаев М-Б.А. Экстремальные свойства и двусторонние оценки в приближении суммами функций меньшего числа переменных. Мат. Заметки, 1984, т. 36, № 5, 647-659.
4. Гаркави А.Л., Медведев В.А., Хавинсон С.Я. О существовании наилучшего равномерного приближения функций двух переменных суммами $\varphi(x)+\psi(y)$. Сибирский мат. журнал, 1995, т. 36, № 4, 819-827.
5. Ismailov V.E. On some classes of bivariate functions characterized by formulas for the best approximation, Radovi Matematicki, Sarajevo 2004, v.13, №1, 53-62.

6. Rivlin T.J., Sibner R.J. The degree of approximation of certain function of two variables by a sum of functions of one variable, Amer. Math. Monthly, 1965, v. 72, № 10, 1101-1103.
7. Flatto L. The approximation of certain functions of several variables by sums of functions of fewer variables, Amer. Math. Monthly, 1966, v. 73, № 4, 131-132.
8. Хавинсон С.Я. Чебышевская теорема для приближения функции двух переменных суммами $\varphi(x)+\psi(y)$. Изв. АН СССР, сер. матем., 1969, т. 33, № 3, 650-666.

İLDIRIMLARIN MAKSİMİZASİYA PRİNSİPİ HAQQINDA

V.E.İSMAYILOV

ANNOTASİYA

Ьцйфдцвц шлшвцншжцтдш агтлышнфтэт ишквцншжцтдш агтлышнфдфкэт сцьш шдц цт нфчжэ нфчэтдфжьфыэтэ руыфидфьфй ъюът шдвэкэьдфкшт ьфлышьшяфышнф зкштышзштц цыфыдфтфт нутш ьуещв ецлдша щдгттк.

ON THE MAXIMIZATION PRINCIPLE OF LIGHTNING BOLTS

V.E.ISMAILOV

ABSTRACT

In this paper, a new method based on the maximization principle of lightning bolts for calculating the exact value of the best approximation of bivariate functions by sums of univariate functions is developed.